Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Vidjet ćemo kako se metode računanja neodređenog integrala mogu primijeniti na određeni integral.
- Nepravi integral je proširenje pojma određenog integrala.

Parcijalna integracija

Parcijalnu integraciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina. Možemo korisiti formulu parcijalne integracije za neodređeni integral

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ili formulu za izravnu parcijalnu integraciju dređenog integrala

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Napomena: Granice a i b u gornjoj formuli odnose se na varijablu x, ne na u i v.

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\int xe^{-x}dx = \left[u = x, dv = e^{-x}dx; du = dx, v = -e^{-x}\right]$$
$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Stoga je $-xe^{-x} - e^{-x}$ primitivna funkcija funkcije xe^{-x}. Po Newton-Leibnitzovoj formuli $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ dobijemo

$$\int_0^3 xe^{-x}dx = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$$

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

2. način:

Koristimo formulu $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$. Dobijemo

$$\begin{aligned}\int_0^3 xe^{-x}dx &= \left[u = x, dv = e^{-x}dx; du = dx, v = -e^{-x}\right] \\ &= -xe^{-x}\Big|_0^3 - \int_0^3 -e^{-x}dx = -3e^{-3} - e^{-x}\Big|_0^3 \\ &= -3e^{-3} - (e^{-3} - 1) = -4e^{-3} + 1.\end{aligned}$$

Supstitucija

Kao i parcijalnu integraciju, tako i supstituciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina.

Možemo riješiti neodređeni integral, a potom uvrstiti granice po Newton-Leibnitzovoj formuli ili možemo raditi “pravu” supstituciju pri kojoj zamijenimo i granice.

U drugom slučaju imamo

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \left[t = \phi(x), dt = \phi'(x)dx\right] = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

Kod supstitucije je potrebno paziti da funkcija ϕ ima inverz.

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}dx = \left[t = x^2-1, dt = 2xdx\right]$$
$$= \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C,$$

a onda je

$$\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}\Big|_{-1}^{2} = 2\sqrt{3}.$$

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

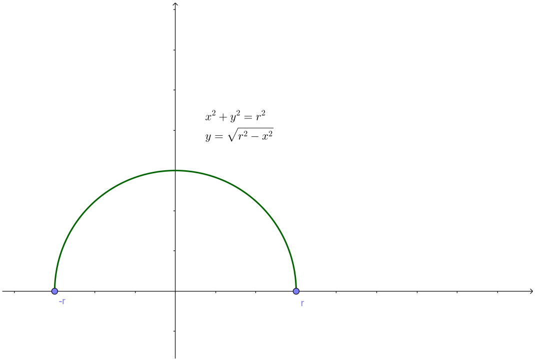
2. način:

Odmah ćemo supstituirati i granice pa imamo

$$\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx = \left[t = x^2-1, dt = 2xdx\right]$$
$$\left[-1 \to (-1)^2 - 1 = 0, 2 \to 2^2 - 1 = 3\right]$$
$$= \int_{0}^{3} \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}.$$

Primjer 3

Koristeći integralni račun izračunajte površinu polukruga radijusa r.



$$P = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = [x = r \sin t, dx = r \cos t dt] = \ldots = \frac{1}{2} r^2 \pi.$$

Zadatak 1

Izračunajte

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx,$

(ii) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx.$

Nepravi integral

- Nepravi integral je poopćenje određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu ($a = -\infty$ ili/i $b = \infty$) ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (npr. ima vertikalnu asimptotu).
- Neprave integrale rješavamo pomoću limesa.
- Ako je nepravi integral konačan, kažemo da **konvergira**, a u protivnom **divergira**.

Beskonačne granice

- $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}$

Napomena: U zadnjem slučaju za c možemo uzeti bilo koji realni broj. Dobro je uzeti neki c s kojim se lako računa, npr. $c = 0$.

Primjer 4

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$$

Primjer 5

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Beskonačna podintegralna funkcija

- f nije definirana u jednom rubu intervala:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$$

- f nije definirana u točki $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1\to c-} \int_a^{c_1} f(x)dx + \lim_{c_2\to c+} \int_{c_2}^b f(x)dx$$

Primjer 6

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

Primjer 7

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Zadatci

2. Geometrijski interpretirajte i izračunajte

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x} dx$$

3. Izračunajte površinu ispog grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ za $x \geq 1$.